14/3/2018

Άσκηση: Έστω G ομάδα, και Η μη κενό, πεπερασμένο υποσύνολο Η μιας ομάδας G, το οποίο είναι κλειστό, ως προς την πράξη της G, είναι υποομάδα της G.

- $H \neq \emptyset$
- H: πεπερασμένο
- $\alpha, \beta \in H \Rightarrow \alpha * \beta \in H$

$\Big\} \ \boxed{H \leq G}$

Απόδειξη: $\boxed{H \neq \emptyset}$: Έστω $\alpha \in H \xrightarrow[\text{ως προς την πράξη}]{H:\text{ κλειστό}} \alpha^2 \in H$, $\alpha \in H$ $\Big\} \ \boxed{\alpha^3 \in H}$

- Όλες οι δυνάμεις του α ανήκουν στο H (επαγωγή)

- Το H είναι πεπερασμένο άρα όλα τα παραπάνω στοιχεία, δεν είναι διαφορετικά μεταξύ τους!!!
- Άρα, υπάρχει $i < j$, τέτοιο ώστε: $\boxed{\alpha^i = \alpha^j}$

• $a^i = a^j \xRightarrow{G} \boxed{a^{j-i} = 1}$, $\boxed{a^{j-i} \in H}$ $\Rightarrow \boxed{1 \in H}$

• **Έχω**: $a^{j-i} = 1 \Rightarrow a \cdot a^{j-i-1} = \underset{\boxed{e_G}}{1} \Rightarrow$ Ο αντίστροφος του a είναι ο $\underline{a^{j-i-1}}$

• **Έχω**: $\underline{j-i>0} \Rightarrow \boxed{j-i-1 \geq 0}$

• Διακρίνω περιπτώσεις: (i) $j-i-1>0 \Rightarrow a^{j-i-1} \in H$, $a^{j-i} \in H$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a^{-1} \in H}$

(ii) $j-i-1=0 \Rightarrow \underline{j-i=1} \Rightarrow a^{j-i}=1 \Rightarrow \boxed{a=1 \in H} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a^{-1} = 1 \in H}$

▶ Άσκηση Έστω H_1, H_2 υποομάδες της G. Δείξτε ότι $H_1 \cap H_2$: υποομάδα της G.

▶ **Λύση**: • $H_1 \leq G \Rightarrow \boxed{e_G \in H_1}$, $H_2 \leq G \Rightarrow \boxed{e_G \in H_2}$ $\Rightarrow e_G \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \boxed{H_1 \cap H_2 \neq \emptyset}$

• **Έστω**: $a, b \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \underline{a, b \in H_1} \land \underline{a, b \in H_2}$

• **Συνεπώς**: $a, b \in H_1 \xrightarrow{H_1 \leq G} a * b^{-1} \in H_1$

και: $a, b \in H_2 \xrightarrow{H_2 \leq G} a * b^{-1} \in H_2$ $\Rightarrow \boxed{a * b^{-1} \in H_1 \cap H_2}$

• **Άρα**: $H_1 \cap H_2$ είναι υποομάδα της G.

⚠ Το αντίστοιχο για την $H_1 \cup H_2$, δεν ισχύει απαραίτητα!!!

▶ **Παράδειγμα** { $(\mathbb{Z}_6,+)$ ⇝ $H_1 = \langle [2]_6 \rangle = \{[0],[2],[4]\}$
$H_2 = \langle [3]_6 \rangle = \{[0],[3]\}$.

• Συνεπώς: $H_1 \cup H_2 = \{[0],[2],[3],[4]\}$

• Καθώς: $4 = |H_1 \cup H_2| \nmid |\mathbb{Z}_6| = 6$

Άρα, δεν είναι υποομάδα!!!

⚠ Δεν είναι, όμως, ούτε ομάδα, καθώς η πράξη μας (πρόσθεση), δεν είναι κλειστή!!!

• Π.χ.: $[3]_6 + [4]_6 = [7]_6 = [1]_6 \notin H_1 \cup H_2$

▶ **Πόρισμα** { Έστω H_1, H_2 υποομάδες της G.

• Η $H_1 \cup H_2$ είναι υποομάδα της G $\iff$ $H_1 \subseteq H_2$ ή $H_2 \subseteq H_1$

▶ Απόδειξη: $(\Longleftarrow)$: $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow H_1 \cup H_2 = H_2 \leq G$
$H_2 \subseteq H_1 \Rightarrow H_1 \cup H_2 = H_1 \leq G$

Αποδείχθηκε!!!

$(\Longrightarrow)$ Έστω $H_1 \not\subseteq H_2 \wedge H_2 \not\subseteq H_1$. Άρα:

• $(\exists\, h_1 \in H_1 \wedge h_1 \notin H_2)$ • $(\exists\, h_2 \in H_2 \wedge h_2 \notin H_1)$

• Έχω: $h_1 \in H_1 \subseteq H_1 \cup H_2$
και: $h_2 \in H_2 \subseteq H_1 \cup H_2$ } $\Longrightarrow$ $\boxed{h_1 * h_2 \in H_1 \cup H_2}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow h_1 * h_2 \in H_1 \vee h_1 * h_2 \in H_2$.

• Αν $\underline{h_1 * h_2 \in H_1}$, τότε: $h_1 \in H_1 \Rightarrow \underline{h_1^{-1} \in H_1}$

• Άρα: $(h_1^{-1} * (h_1 * h_2)) \in H_1 \Rightarrow \boxed{h_2 \in H_1}$ ↯ Άτοπο!!!

• Αν $\underline{h_1 * h_2 \in H_2}$, ξέρω ότι: $h_2 \in H_2 \Rightarrow \underline{h_2^{-1} \in H_2}$

• Άρα: $(h_1 * h_2) * h_2^{-1} \in H_2 \Rightarrow \boxed{h_1 \in H_2}$ ↯ Άτοπο!!!

→ Άρα: $H_1 \subseteq H_2$ ή $H_2 \subseteq H_1$

Θεώρημα Η σχέση $\sim_L$ (όπως και η $\sim_R$) είναι σχέση ισοδυναμίας!!!

• $H \leq G$ και $a, b \in G$

Τότε: $a \sim_L b$, αν και μόνο αν: $a^{-1} * b \in H$

και: $a \sim_R b$, αν και μόνο αν: $a * b^{-1} \in H$

Παράδειγμα $\langle 7 \rangle = 7\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.

• Έχω ότι: $a \sim_L b$, αν και μόνο αν: $\underline{b - a \in 7\mathbb{Z}}$

(*) ▸ **Απόδειξη**: (i) Έστω $\alpha \in G$. Τότε:

Καθώς: $e_G \in H$ (αφού $H \le G$) $\Rightarrow \alpha^{-1} * \alpha \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \sim_L \alpha \Rightarrow \boxed{\sim_L : \text{ανακλαστική}}$

(ii) Θεωρώ $\alpha, \beta \in G$.

Τότε: $\alpha \sim_L \beta \Rightarrow \alpha^{-1} * \beta \in H \xRightarrow{H \le G} (\alpha^{-1} * \beta)^{-1} \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta^{-1} * (\alpha^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow \beta^{-1} * \alpha \in H \Rightarrow \beta \sim_L \alpha$

• Άρα: $\boxed{\sim_L : \text{συμμετρική}}$

(iii) Για: $\alpha, \beta, \gamma \in G$, έχω:

$\alpha \sim_L \beta \wedge \beta \sim_L \gamma \Rightarrow (\alpha^{-1} * \beta \in H) \wedge (\beta^{-1} * \gamma \in H)$

$\xRightarrow[\text{προς την πράξη}]{H : \text{κλειστή ως}} (\alpha^{-1} * \beta) * (\beta^{-1} * \gamma) \in H \Rightarrow (\alpha^{-1} * \gamma) \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \sim_L \gamma \Rightarrow \boxed{\sim_L : \text{μεταβατική}}$

• Άρα, η $\boxed{\sim_L : \text{σχέση ισοδυναμίας!!!}}$

▸ **Κλάση του** α: $[\alpha]_\sim = \{x \in G \mid \alpha \sim_L x\}$

• **Έχω**: $\alpha \sim_L x \Rightarrow \alpha^{-1} * x \in H \Rightarrow \alpha^{-1} * x = h \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha * \alpha^{-1} * x = \alpha * h \Rightarrow \boxed{x = \alpha * h, \text{ με } h \in H}$

• Αν το α είναι από αριστερά, καλείται αριστερό σύμπλοκο ή αριστερή πλευρική κλάση!

• Συνεπώς: $[\alpha]_{\sim_L} = \{x\in G \mid \alpha \sim_L x\} = \{\alpha * h \mid h\in H\} = \alpha H$

(left)

Και:

$[\alpha]_{\sim_R} = \{x\in G \mid \alpha \sim_R x\} = \{h * \alpha \mid h\in H\} = H\alpha$

(Right)

→ Δεξιά πλευρική κλάση ή δεξιό σύμπλοκο

▶ Παράδειγμα

$$\bullet\ S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3\\1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\2&3&1 \end{pmatrix} \right\}$$

κυκλική μορφή

$$= \{ (1)(2)(3), (1)(2,3), (1,3,2), (1,3)(2), (1,2)(3), (1,2,3) \}$$

Συντομικά

$$= \{ I, (2,3), (1,3,2), (1,3), (1,2), (1,2,3) \}$$

• Παρατηρώ: $H = \langle (2,3) \rangle = \{(2,3), I\}$,

διότι: $[(2,3)]^2 = (2,3)(2,3) = (1)(2)(3) = I$

και $[(2,3)]^3 = (2,3)(2,3)(2,3) = I\cdot(2,3) = (2,3)$

▶ Αριστερά σύμπλοκα της H, στην S_3:

• Για $\alpha\in S_3$, έχω: • Για $\alpha = I$: $IH = I\{I,(2,3)\} = H$

• Για $\alpha = (2,3)$: $(2,3)H = (2,3)\{I,(2,3)\} = \{(2,3), I\} = H$

- Για $\alpha = (1,3)$: $(1,3) \cdot H = (1,3)\{I, (2,3)\} = \{(1,3), (1,3,2)\}$

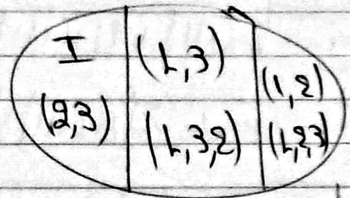
  αφού: $(1,3)(2,3) = (1,3,2)$

- Για $\alpha = (1,3,2)$: $(1,3,2) \cdot H = (1,3,2)\{I, (2,3)\} = \{(1,3,2), (1,3)\}$

- Για $\alpha = (1,2)$: $(1,2) H = (1,2)\{I, (2,3)\} = \{(1,2), (1,2,3)\}$

- Για $\alpha = (1,2,3)$: $(1,2,3) H = (1,2) \cdot H = \{(1,2), (1,2,3)\}$

- Εν τέλει :



Κλάσεις ισοδυναμίας!!!

▶ Δεξιά σύμπλοκα της H στην S_3

- Για $\alpha = I \rightsquigarrow H \cdot I = H = \{I, (2,3)\}$
- Για $\alpha = (2,3) \rightsquigarrow H \cdot (2,3) = H = \{(2,3), I\}$
- Για $\alpha = (1,2) \rightsquigarrow H \cdot (1,2) = \{I, (2,3)\} \cdot (1,2) = \{(1,2), (1,3,2)\}$
- Για $\alpha = (1,3,2) \rightsquigarrow H(1,3,2) = \{(1,3,2), (1,2)\}$
- Για $\alpha = (1,3) \rightsquigarrow H(1,3) = \{(1,3), (1,2,3)\}$
- Προφανώς : $H(1,2,3) = \{(1,3), (1,2,3)\}$